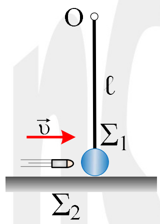
Κουρεύοντας τον κύκλο.



Σώμα Σ_1 μάζας M = 2 kg, είναι δεμένο στο άκρο αβαρούς, μη εκτατού νήματος, μήκους $\ell = 0{,}8$ m. Βλήμα Σ_2, μάζας m = 0,2 kg κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 40\sqrt{7}$ m/s διαπερνά το Σ_1 έχοντας μετά την κρούση ταχύτητα μέτρου υ′. Το Σ_1 αφού διαγράψει από την αρχική του θέση γωνία 120^o - έχοντας εκείνη την στιγμή ταχύτητα μέτρου υ_2 - το νήμα χαλαρώνει. Να βρεθούν:

α. το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_2$ την στιγμή που το νήμα χαλαρώνει

β. την κινητική ενέργεια του βλήματος (Σ_2) αμέσως μετά την διάτρηση του Σ_1

γ. το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το Σ_1 από την αρχική του θέση

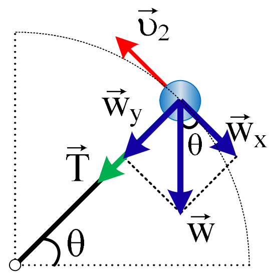
δ. το χρονικό διάστημα που το νήμα είναι χαλαρωμένο

ε. την μεταβολή της ορμής του Σ_1 στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$. Οι αντιστάσεις από τον αέρα θεωρούνται αμελητέες.

Λύση

α. Το Σ_1 (όσο το νήμα είναι τεντωμένο) εκτελεί κυκλική κίνηση, οπότε για την συνισταμένη των δυνάμεων κατά μήκος της επιβατικής ακτίνας-νήματος ισχύει:



$$\Sigma\vec{F}_R = M\vec{\alpha}_\kappa \Rightarrow T + Mg\eta\mu\theta = \frac{M\upsilon_2^2}{\ell} \Rightarrow T = \frac{M\upsilon_2^2}{\ell} - Mg\eta\mu\theta \quad (1)$$

Το νήμα χαλαρώνει την στιγμή που T = 0 έτσι από την (1) έχουμε:

$$T = 0 \Rightarrow \frac{M\upsilon_2^2}{\ell} - Mg\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{g\ell\eta\mu\theta} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_2 = 2\frac{m}{s}}$$

β. Την στιγμή της χαλάρωσης του νήματος το Σ_1 έχει ανέβει κατακόρυφα κατά $h = \ell + \ell\eta\mu\theta = 1{,}2$ m

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το Σ_1, από την στιγμή αμέσως μετά την κρούση μέχρι την στιγμή της χαλάρωσης του νήματος.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 = -Mgh \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_2^2 + 2gh} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_1 = 2\sqrt{7}\frac{m}{s}}$$

Κατά την κρούση το σύστημα είναι μονωμένο οπότε ισχύει η Α.Δ.Ο. έτσι έχουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon = M\upsilon_1 + m\upsilon' \Rightarrow \upsilon' = \upsilon - \frac{M\upsilon_1}{m} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon' = 20\sqrt{7}\,\frac{m}{s}}$$

Άρα η κινητική ενέργεια του βλήματος μετά την κρούση είναι:

$$K'_{\beta\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon'^2 \Rightarrow \mathbf{K'_{\beta\lambda} = 280\,J}$$

γ. Μετά την χαλάρωση του νήματος το Σ_1 θα εκτελέσει μία καμπυλόγραμμη κίνηση που μπορεί να θεωρηθεί ως μία επαλληλία μίας οριζόντιας κίνησης (όπου δεν ασκούνται δυνάμεις και η οριζόντια ταχύτητα μένει σταθερή) και μίας κατακόρυφης όπου εκεί ασκείται μόνο το βάρος (βολή προς τα πάνω).

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κατακόρυφη κίνηση, από την στιγμή που χαλαρώνει το νήμα μέχρι την στιγμή που μηδενίζεται η κατακόρυφη ταχύτητα.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}M\upsilon_{2y}^2 = -Mgh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{\upsilon_{2y}^2}{2g} = \frac{\upsilon_2^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{2g} \Rightarrow \mathbf{h_1 = 0{,}15\,m}$$

Άρα το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα (από την αρχική του θέση) είναι:

$H = h + h_1 \Rightarrow \mathbf{H = 1{,}35\ m}$.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. ως εξής (έχοντας δεδομένο ότι στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα δεν είναι μηδέν αλλά μέτρου υ_{2x})

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_{2x}^2 - \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 = -Mgh_1 \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_{2x}^2 - \frac{1}{2}M(\upsilon_{2x}^2 + \upsilon_{2y}^2) = -Mgh_1 \Rightarrow$$

$$h_1 = \frac{\upsilon_{2y}^2}{2g} = \frac{\upsilon_2^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{2g} \Rightarrow \mathbf{h_1 = 0{,}15\,m}$$

δ. Στον οριζόντιο άξονα, όπως είπαμε παραπάνω η ταχύτητα παραμένει σταθερή δηλαδή η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή. Το πρόβλημα τώρα είναι αν όταν το νήμα ξανατεντωθεί το σώμα θα έχει φτάσει στην απέναντι συμμετρική θέση στον x′x ή στον y′y.

Η συμμετρική οριζόντια θέση απέχει απόσταση $s = 2\ell\sigma\upsilon\nu\theta$.

Οπότε ισχύει: $\upsilon_{2x} = \dfrac{s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{s}{\upsilon_{2x}} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{2\ell\sigma\upsilon\nu\theta}{\upsilon_2\eta\mu\theta} \Rightarrow \mathbf{\Delta t = 0{,}8\sqrt{3}\,s}$

Η εξίσωση κίνησης στον κατακόρυφο άξονα είναι:

$$y = h + \upsilon_{2y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = \left(1{,}2 + \sqrt{3}\cdot 0{,}8\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot (0{,}8\sqrt{3})^2\right)m \Rightarrow y = -6\,m \text{ αδύνατο.}$$

Για να δούμε τώρα ποια χρονική στιγμή το σώμα φτάνει στην θέση y = 0.

$$y = h + \upsilon_{2y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 1{,}2 + \sqrt{3}\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot t^2 \Rightarrow \mathbf{t = 0{,}4\sqrt{3}\,s}$$

Την ίδια χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται στην θέση:

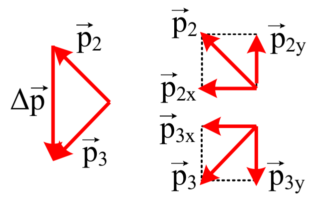
$$x = x_0 - \upsilon_{2x}t \Rightarrow x = 0{,}4\sqrt{3}\,m - 1\cdot 0{,}4\sqrt{3}\,m \Rightarrow x = 0 \text{ δεκτή.}$$

Άρα το σώμα πέφτοντας περνά από την αρχική θέση!!! (x = 0, y = 0) (εκεί τεντώνει ξανά το νήμα).

ε. Η ορμή μεταβάλλεται μόνο στον άξονα y′y (ασκείται το βάρος), θεωρούμε θετική την φορά προς τα κάτω

και έχουμε: $\upsilon_{3y} = \upsilon_{2y} - gt \Rightarrow \upsilon_{3y} = \left(\sqrt{3} - 10\cdot 0{,}4\sqrt{3}\right)\frac{m}{s} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_{3y} = -3\sqrt{3}\,\frac{m}{s}}$

$$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_x + \Delta\vec{p}_y = \Delta\vec{p}_y \Rightarrow \Delta p = \Delta p_y = M\upsilon_{3y} - (-M\upsilon_2\text{συνθ}) \Rightarrow \mathbf{\Delta p = 8\sqrt{3}\,\frac{kg\cdot m}{s}}$$



Η φορά είναι κατακόρυφη προς τα κάτω όπως φαίνεται στο σχήμα.

Το ίδιο ερώτημα θα μπορούσε να απαντηθεί (επειδή ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής είναι σταθερός) και ως

εξής: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F} = \vec{w} = M\vec{g} \Rightarrow d\vec{p} = M\vec{g}\cdot dt \Rightarrow dp = Mg\cdot dt \Rightarrow \mathbf{\Delta p = 8\sqrt{3}\,\frac{kg\cdot m}{s^2}}$

Σημείωση: Η μαθηματική λύση για το ερώτημα δ είναι η εξής:

Θεωρούμε σύστημα αξόνων με το κέντρο της κυκλικής τροχιάς να βρίσκεται στο (0, 0)

Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 = 0{,}8^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{0{,}64 - x^2}$ (S.I.) (1)

Η θέση που χαλαρώνει το νήμα στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι η (x_0, y_0): $\left(0{,}4\sqrt{3}\ ,\ 0{,}4\right)$ S.I.

Οι εξισώσεις κίνησης του σώματος είναι:

$x = x_0 - \upsilon_{2x}t \Rightarrow x = 0{,}4\sqrt{3} - t$ (S.I.) (2) και

$y = y_0 + \upsilon_{2y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 0{,}4 + \sqrt{3}t - 5t^2$ (S.I.) (3)

Με απαλοιφή του χρόνου από τις (2) και (3) προκύπτει: $y = -5x^2 + 3\sqrt{3}x - 0{,}8$ (S.I.) (4)

Θέλουμε τα σημεία τομής του κύκλου (εξίσωση (1)) και της παραβολής (εξίσωση (4))

Παρακάτω για χάριν ευκολίας παραλείπουμε τις μονάδες.

$\pm\sqrt{0,64-x^2} = -5x^2 + 3\sqrt{3}x - 0,8 \Rightarrow 125x^4 - 150\sqrt{3}x^3 + 180x^2 - 24\sqrt{3}x = 0$

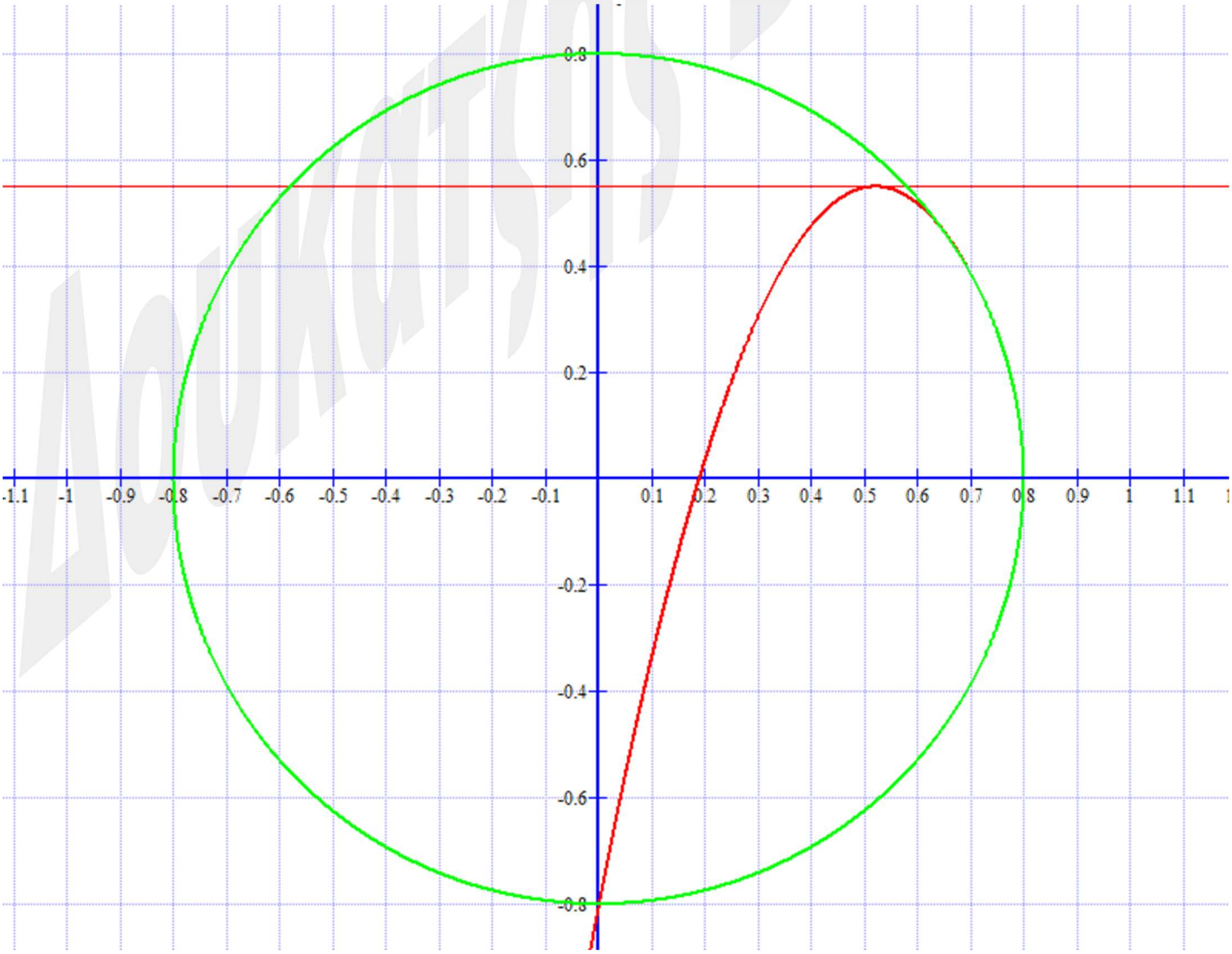
Η παραπάνω εξίσωση παραγοντοποιείται με την βοήθεια του mathematica και γίνεται:

$x(5x-2\sqrt{3})^3 = 0$ με λύσεις x = 0 και από την (4) y = – 0,8 m

και $x = 0,4\sqrt{3}\,m$ και από την (4) y = 0,4 m (που είναι το σημείο χαλάρωσης του νήματος με βάση τις νέες συντεταγμένες του κύκλου.

Να θυμίσουμε ότι στην αρχική λύση του ερωτήματος δ. ως αρχή των αξόνων θεωρήσαμε την θέση όπου ισορροπούσε το Σ_1 πριν την κρούση.

Βάζοντας τις (1), (4) στο Graph παίρνουμε την παρακάτω γραφική παράσταση.



Σημείωση: Να πούμε εδώ ότι η παραπάνω τιμή της γωνίας (30^o πάνω από την οριζόντια) είναι κατά κάποιο τρόπο "προνομιακή" αφού δίνει "εύκολη" λύση.

Δοκίμασα και για άλλες τιμές γωνιών αλλά προκύπτει ένα χάος και μάλλον μόνο με ειδικά προγράμματα λύνεται η ίδια άσκηση (π.χ. mathematica).

Η άσκηση αυτή ως το γ ερώτημα μπορεί να δοθεί σε μαθητές, παρακάτω όμως ξεφεύγει από τα "μαθητικά πλαίσια".

Μία γραφική παράσταση για ημθ = 0,8 και συνθ = 0,6 είναι η παρακάτω.