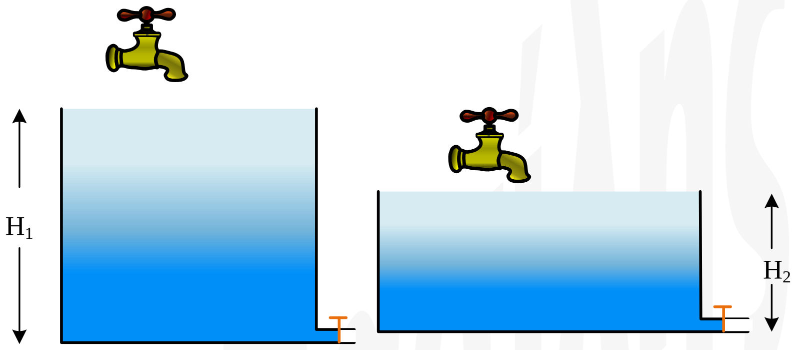
Ίδιου όγκου δοχεία … διαφορετικός λογαριασμός.

Δύο ίδιου όγκου δοχεία σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου ύψους $H_1 = 1{,}8$ m και H_2 αντίστοιχα, διατομές βάσης $A_1 = 1$ m^2 και $A_2 = 2{,}25$ m^2, τα γεμίζουμε με ίση ποσότητα νερού το οποίο το θεωρούμε ιδανικό ρευστό πυκνότητας $\rho = 10^3$ kg/m^3. Ανοίγουμε τις βάνες που έχουμε προσαρμόσει στο κατώτερο σημείο του κάθε δοχείου και το κάθε υγρό εκτελεί οριζόντια βολή. Μόλις οι στάθμες στο κάθε δοχείο υποτετραπλασιαστούν ανοίγουμε τις βρύσες που υπάρχουν από πάνω τους έτσι ώστε από κει και έπειτα η στάθμη του κάθε δοχείου να διατηρείται σταθερή.



α. Ποια η αρχική ταχύτητα εκροής κάθε φλέβας

β. Ποια η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου της κάθε φλέβας όταν υποτετραπλασιαστεί η κάθε στάθμη

γ. Ποιες οι παροχές $Π_1$ και $Π_2$ ώστε να διατηρούνται σταθερές οι στάθμες και στα δύο δοχεία και πόσο θα πληρώσουμε στην ΕΥΔΑΠ αν λειτουργούν και οι δύο βρύσες συνεχόμενα για 15h (θεωρούμε ότι δεν θα έχουμε άλλη κατανάλωση για το υπόλοιπο 3μήνο στο δίκτυο μας).

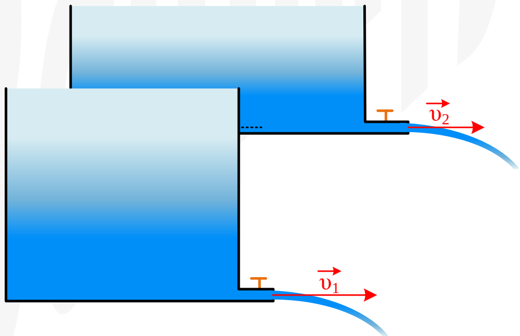
δ. Για να μην ξοδεύουμε άδικα το νερό βάζουμε το πρώτο δοχείο πάνω σε μία βάση ύψους $h_1 = 0{,}8$ m, ώστε να φτάνει ακριβώς στο αυλάκι του κήπου μας. Σε τι ύψους βάση θα πρέπει να ανεβάσουμε το δεύτερο δοχείο ώστε από το ίδιο σημείο με το πρώτο να κάνει βολή στο ίδιο αυλάκι; (οι βρύσες από πάνω τους συνεχίζουν να διατηρούν την στάθμη σταθερή)

Δίνεται $g = 10$ m/s^2, οι αντιστάσεις του αέρα θεωρούνται αμελητέες, η ροή στρωτή και το νερό από τις πάνω βάνες θεωρούμε ότι πέφτει με σχεδόν μηδενική ταχύτητα. Η οπή κάθε τρύπας είναι $A_{οπ} = 2$ cm^2.

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανάλωσης.

Κατανάλωση σε κυβικά μέτρα (m^3)	Χρέωση σε € ανά κυβικό μέτρο
0 – 5	0,39
5 – 20	0,61
20 – 27	1,75
27 – 35	2,45
Περισσότερα από 35	3,05

Λύση.



α. Και τα δύο δοχεία έχουν πολύ μεγάλες επιφάνειες σε σχέση με την οπή, έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κάθε στάθμη κατεβαίνει με μηδενική ταχύτητα και να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Torricelli.

Έτσι έχουμε $\upsilon_1 = \sqrt{2gH_1} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_1 = 6\frac{m}{s}}$.

Εφόσον τα δοχεία περιέχουν αρχικά την ίδια ποσότητα νερού, θα ισχύει:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow A_1H_1 = A_2H_2 \Rightarrow H_2 = \frac{A_1H_1}{A_2} \Rightarrow \mathbf{H_2 = 0,8\,m}$$

Και σύμφωνα με το Torricelli $\upsilon_2 = \sqrt{2gH_2} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_2 = 4\frac{m}{s}}$.

β. Όταν η κάθε στάθμη υποτετραπλασιαστεί οι στιγμιαίες ταχύτητες εκροής θα είναι αντίστοιχα

$$\upsilon_1' = \sqrt{\frac{2gH_1}{4}} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_1' = 3\frac{m}{s}} \quad \text{και} \quad \upsilon_2' = \sqrt{\frac{2gH_2}{4}} \Rightarrow \mathbf{\upsilon_2' = 2\frac{m}{s}}$$

Έτσι οι αντίστοιχες κινητικές ενέργειες ανά μονάδα όγκου θα είναι

$$\frac{K_1}{V} = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1'^2 \Rightarrow \mathbf{\frac{K_1}{V} = 4500\frac{J}{m^3}} \quad \text{και} \quad \frac{K_2}{V} = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2'^2 \Rightarrow \mathbf{\frac{K_2}{V} = 2000\frac{J}{m^3}}$$

γ. Οι παροχές που πρέπει να έχουν οι βρύσες ώστε από κει και πέρα να μένουν οι στάθμες σταθερές μπορούν να βρεθούν από την εξίσωση της συνέχειας για κάθε δοχείο, αφού όσο νερό θα ρίχνει η βρύση στο εκάστοτε δοχείο τόσο θα φεύγει από την οπή.

$$\Pi_1 = A_{o\pi} \cdot \upsilon'_1 \Rightarrow \Pi_1 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 3\frac{m^3}{s} \Rightarrow \mathbf{\Pi_1 = 6 \cdot 10^{-4}\frac{m^3}{s} = 2,16\frac{m^3}{h}}$$

$$\Pi_2 = A_{o\pi} \cdot \upsilon'_2 \Rightarrow \Pi_2 = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2\frac{m^3}{s} \Rightarrow \mathbf{\Pi_2 = 4 \cdot 10^{-4}\frac{m^3}{s} = 1,44\frac{m^3}{h}}$$

Η κατανάλωση του νερού τιμολογείται με βάση τον όγκο του νερού που καταναλώσαμε. Έστω Λ ο λογαριασμός έτσι θα έχουμε:

$V_1 = \Pi_1 \Delta t \Rightarrow V_1 = 2{,}16 \cdot 15 m^3 \Rightarrow \mathbf{V_1 = 32{,}4 m^3}$ και

$V_2 = \Pi_2 \Delta t \Rightarrow V_2 = 1{,}44 \cdot 15 m^3 \Rightarrow \mathbf{V_2 = 21{,}6 m^3}$

(Εδώ θα πρέπει να προσέξουμε την κλιμακωτή χρέωση)

Οπότε: $\Lambda_1 = V_1 \cdot \chi\rho\acute{\varepsilon}\omega\sigma\eta = (5 \cdot 0{,}39 + (20-5) \cdot 0{,}61 + (27-20) \cdot 1{,}75 + (32{,}4-27) \cdot 2{,}45)\,€ \Rightarrow \mathbf{\Lambda_1 = 36{,}58\,€}$

$\Lambda_2 = V_2 \cdot \chi\rho\acute{\varepsilon}\omega\sigma\eta = (5 \cdot 0{,}39 + (20-5) \cdot 0{,}61 + (21{,}6-20) \cdot 1{,}75)\,€ \Rightarrow \mathbf{\Lambda_2 = 13{,}9\,€}$

δ. Οι δύο φλέβες εκτελούν οριζόντια βολή. Ο χρόνος πτώσης μιας στοιχειώδους μάζας του ρευστού για το πρώτο δοχείο είναι: $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 0{,}4s}$

Θέλουμε οι φλέβες να καταλήγουν στο ίδιο αυλάκι, δηλαδή να έχουν ίδιο βεληνεκές άρα:

$s_1 = s_2 \Rightarrow \upsilon'_1 t_1 = \upsilon'_2 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\upsilon'_1 t_1}{\upsilon'} \Rightarrow \mathbf{t_2 = 0{,}6s}$

Και τελικά x $h_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow \mathbf{h_2 = 1{,}8m}$