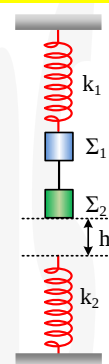


Εσείς οι από πάνω, προσέχετε τους από κάτω.

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του παρακάτω σχήματος έχουν μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 0,5 \text{ kg}$, αντίστοιχα είναι ενωμένα μεταξύ τους με αβαρές νήμα μήκους ℓ και αρχικά ισορροπούν. Το σώμα Σ_1 είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου (1) σταθεράς k_1 , το πάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Το σώμα Σ_2 απέχει απόσταση $h = 0,175 \text{ m}$ από το ελεύθερο άκρο δεύτερου κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου (2) σταθεράς k_2 , του οποίου το κάτω άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο στο έδαφος. Εκτρέπουμε το σύστημα των σωμάτων προς τα κάτω και το αφήνουμε να εκτελέσει α.α.τ. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου k_1 είναι $U_{\text{ελ},1\text{max}} = 6,25 \text{ J}$, ενώ το νήμα μόλις που δεν χαλαρώνει κατά την διάρκεια της ταλάντωσης των Σ_1 και Σ_2 .



α. Να υπολογίσετε τη σταθερά k_1 του ελατηρίου (1).

β. Να κάνετε την γραφική παράσταση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x .

Την στιγμή που το ταλαντούμενο σύστημα των δύο σωμάτων βρίσκεται στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσης του κόβουμε το νήμα που τα συνδέει, οπότε το σώμα Σ_2 κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου (2) και καρφώνεται ακαριαία σε αυτό χωρίς απώλεια ενέργειας. Η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου k_2 είναι $d = 0,6 \text{ m}$. Οι ταλαντώσεις που εκτελούν τα δύο σώματα θεωρούνται απλές αρμονικές με σταθερές $D = k$ σε κάθε περίπτωση.

γ. Να υπολογίσετε το πλάτος A_1 της ταλάντωσης του Σ_1 μετά το κόψιμο του νήματος.

δ. Να βρείτε τη σταθερά του ελατηρίου (2) και το πλάτος A_2 της ταλάντωσης του σώματος Σ_2 .

ε. Να γράψετε την χρονική εξίσωση της κινητικής ενέργειας του Σ_2 . Να θεωρήσετε ως $t = 0$ τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ_2 καρφώνεται στο ελατήριο (2) και ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\pi^2 = 10$. Τα δύο σώματα έχουν αμελητέες διαστάσεις.

Λύση

α. Μέγιστη δυναμική ενέργεια έχει το ελατήριο όταν βρίσκεται στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσης. Άρα $\Delta \ell_{\max} = \Delta \ell + A$.

Στην θέση ισορροπίας ισχύει

$$\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\zeta} = \vec{0} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow k_1 \Delta \ell = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \Delta \ell = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1} \quad (1).$$

Για την ταλάντωση του Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_2 = m_2 \vec{a} \Rightarrow T - w_2 = m_2 a \Rightarrow T = m_2 g - m_2 \omega^2 x \Rightarrow T = m_2 (g - \omega^2 x) \quad (2)$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση το νήμα μόλις που δεν χαλαρώνει δηλαδή παίρνει τιμές $T \geq 0$ οπότε:

$$T \geq 0 \Rightarrow m_2 (g - \omega^2 x) \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{g}{\omega^2} \Rightarrow x \leq \frac{g}{\frac{k_1}{m_1 + m_2}} \Rightarrow x \leq \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1} \Rightarrow A = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1} = \Delta \ell \quad (3)$$

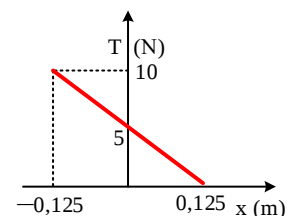
$$\text{Άρα } U_{\varepsilon\lambda, \max} = \frac{1}{2} k_1 \Delta \ell_{\max}^2 = \frac{1}{2} k_1 (\Delta \ell + A)^2 = \frac{1}{2} k_1 (2\Delta \ell)^2 = 2k_1 \Delta \ell^2 = 2k_1 \frac{(m_1 + m_2)^2 g^2}{k_1^2} \Rightarrow$$

$$k_1 = \frac{2(m_1 + m_2)^2 g^2}{U_{\varepsilon\lambda, \max}} \Rightarrow k_1 = \frac{2 \cdot 2,5^2 \cdot 100}{6,25} \frac{\text{N}}{\text{m}} \Rightarrow \mathbf{k_1 = 200 \frac{N}{m}} \text{ και } k_1 = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 80 \text{ rad}^2/\text{s}^2.$$

β. Από την σχέση (2) προκύπτει ότι: $T = 5 - 40x$ (S.I.)

Από την σχέση (3) προκύπτει ότι πλάτος είναι $A = 0,125 \text{ m}$.

Η ζητούμενη γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



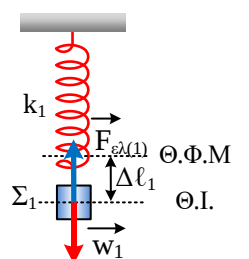
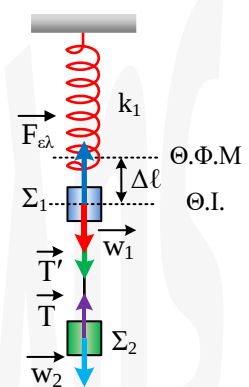
γ. Την στιγμή που κόψαμε το νήμα τα δύο σώματα ήταν στιγμιαία ακίνητα στην πάνω ακραία θέση.

Έτσι λοιπόν το Σ_1 ξεκινά την ταλάντωση του από ακραία θέση ($v = 0$) και η θέση ισορροπίας βρίσκεται από την σχέση

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda(1)} = w_1 \Rightarrow k_1 \Delta \ell_1 = m_1 g \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{m_1 g}{k_1} \Rightarrow \Delta \ell_1 = 0,1 \text{ m}.$$

Αποδείξαμε στο ερώτημα α ότι η ακραία θέση της ταλάντωσης των Σ_1 και Σ_2 είναι η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου ($\Delta \ell = A$), οπότε η νέα ταλάντωση (για το Σ_1) ξεκινά από την Θ.Φ.Μ., συνεπώς $A_1 = \Delta \ell_1 \Rightarrow$

$$\mathbf{A_1 = 0,1 \text{ m} .}$$



δ. Το Σ₂ ξεκινά την ελεύθερη πτώση (την στιγμή του κοψίματος $v = 0$) και διανύει απόσταση $h + A$ μέχρι να συναντήσει το πάνω άκρο του ελατηρίου.

Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Κ.Ε από την θέση εκκίνησης του Σ₂ ($K_{αρχ} = 0$) μέχρι που ακινητοποιείται στην θέση μέγιστης παραμόρφωσης του ελατηρίου ($K_{τελ.} = 0$).

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου είναι:

$$W_{F_{ελ}} = -\Delta U_{ελ} = U_{ελ, αρχ} - U_{ελ, τελ} = 0 - \frac{1}{2} k_2 d^2 \Rightarrow W_{F_{ελ}} = -\frac{1}{2} k_2 d^2$$

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = \Sigma W \Rightarrow 0 - 0 = W_{w_2} + W_{F_{ελ}} \Rightarrow 0 = m_2 g(h + A + d) - \frac{1}{2} k_2 d^2 \Rightarrow k_2 = \frac{2[m_2 g(h + A + d)]}{d^2} \Rightarrow$$

$$k_2 = 25 \frac{N}{m}$$

Για την Θ.Ι. της ταλάντωσης του Σ₂ έχουμε: την σχέση

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_{ελ(2)} = w_2 \Rightarrow k_2 \Delta \ell_2 = m_2 g \Rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{m_2 g}{k_2} \Rightarrow \Delta \ell_2 = 0,2 \text{ m}.$$

Αλλά ισχύει $d = \Delta \ell_2 + A_2 \Rightarrow A_2 = 0,4 \text{ m}$.

ε. Την $t_0 = 0$ για την δεύτερη ταλάντωση έχουμε $v < 0$ και $x = +\Delta \ell_2 = 0,2 \text{ m}$.

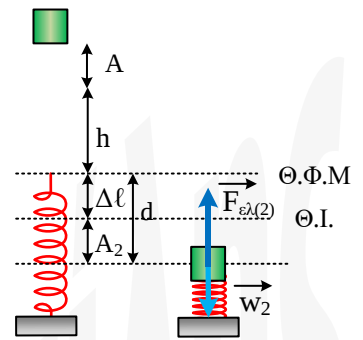
$$\text{Για την αρχική φάση ισχύει: } \eta \mu \varphi_0 = \frac{x}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{array}$$

Το σώμα την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έχουμε $v < 0$.

$$v = v_{\max} \sin \frac{\pi}{6} > 0 \text{ και } v = v_{\max} \sin \frac{5\pi}{6} < 0. \text{ Άρα } \varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{Η κυκλική συχνότητα είναι: } k_2 = m_2 \omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = 5\sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$K = \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2\max}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow K = 2 \sin^2(5\sqrt{2}t + \frac{5\pi}{6}).$$



Σημείωση: Το πλάτος στο ερώτημα δ θα μπορούσαμε να το βρούμε με την βοήθεια της Α.Δ.Ε. για την ταλάντωση, αφού βρίσκαμε την ταχύτητα την στιγμή της επαφής του σώματος Σ₂ με το ελατήριο.

Την στιγμή που το Σ_2 ακουμπά στο ελατήριο έχει ταχύτητα μέτρου v_2 που μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. από την στιγμή της εκκίνησης (ανώτερο σημείο της αρχικής ταλάντωσης) μέχρι την επαφή με το ελατήριο.

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g(h + A) \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g(h + A)} \Rightarrow v_2 = \sqrt{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

και $x = \Delta \ell_2$ ενώ έχουμε $A = d - \Delta \ell_2$

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k_2 (d - \Delta \ell_2)^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta \ell_2^2 \Rightarrow k_2 d^2 + k_2 \Delta \ell_2^2 - 2k_2 d \Delta \ell_2 = m_2 v_2^2 + k_2 \Delta \ell_2^2 \Rightarrow$$

$$k_2 d^2 - 2k_2 d \frac{m_2 g}{k_2} = m_2 v_2^2 \Rightarrow k_2 = \frac{m_2 (v_2^2 + 2gd)}{d^2} \Rightarrow \mathbf{k_2 = 25 \frac{N}{m}}$$

Όπως φαίνεται ξεκάθαρα η διαδικασία αυτή είναι πιο χρονοβόρα και εκτός αυτού χρειάζεται και το μέτρο της ταχύτητας την στιγμή της επαφής του σώματος με το ελατήριο.