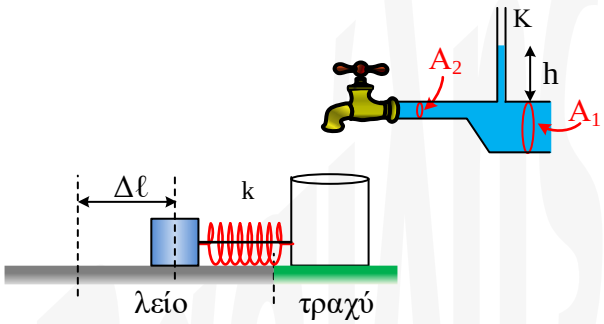
**Άνοιξε την βάνα μπας και δούμε καμιά ταλάντωση.**




Στην διπλανή διάταξη το σώμα Σ μικρών διαστάσεων έχει μάζα m = 1 kg και είναι δεμένο στο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς k. Το σώμα Σ βρίσκεται πάνω σε λείο επίπεδο και μέσω νήματος κρατείται έτσι ώστε να είναι συμπιεσμένο το ελατήριο κατά Δℓ. Στο άλλο άκρο του νήματος (και του ελατηρίου) βρίσκεται κυλινδρικό δοχείο (κουβάς) μάζας $m_1$ = 0,4 kg, που ισορροπεί πάνω σε τραχύ έδαφος με συντελεστή στατικής τριβής μ = 0,8. Αν κόψουμε το νήμα με τον κουβά άδειο τότε δεν θα μπορέσουμε να δούμε αρμονικές ταλαντώσεις. Για τον λόγο αυτό ανοίγουμε την βάνα (στο τέρμα) με διατομή $A_2$, που βρίσκεται ακριβώς πάνω από τον κουβά και αν την αφήσουμε να τρέξει για Δt = 7 s, θα μπορούμε να κόψουμε το νήμα, και να δούμε αρμονικές ταλαντώσεις από το σώμα Σ. Το στόμιο της βάνας έχει διατομή $A_2$ = 1 $cm^2$ και είναι η κατάληξη από άλλο σωλήνα τριπλάσιας ($A_1 = 3A_2$) διατομής. Η παροχή της βάνας είναι Π = 0,3 L/s (τελείως ανοιχτή) και το νερό που ρέει έχει πυκνότητα ρ = $10^3$ kg/$m^3$ και θεωρείται ιδανικό ρευστό. Το ύψος της στήλης στον κατακόρυφο σωλήνα Κ είναι ίσο με την απόσταση που θα διανύσει το σώμα μόλις κόψουμε το νήμα πριν αλλάξει κατεύθυνση. Να βρείτε:

**α.** Την μέγιστη δύναμη που ασκεί το ελατήριο όταν κόψουμε το νήμα μετά την χρονικό διάστημα Δt.

**β.** Την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου στο σωλήνα με διατομή $A_1$

**γ.** Το ύψος h της κατακόρυφης στήλης

**δ.** Τη σταθερά του ελατηρίου και την εξίσωση της απομάκρυνσης θεωρώντας θετικό άκρο την θέση που θα σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά.

Δίνεται g = 10 m/$s^2$ και θεωρούμε την ροή μόνιμη και στρωτή, επίσης να θεωρήσετε την κρουστική δύναμη του υγρού αμελητέα.

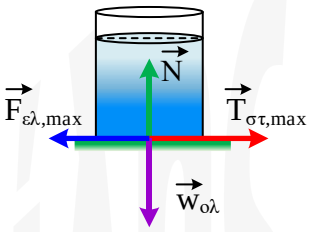
**Λύση**

**α.** Η μάζα του νερού που θα έχει μπει στον κουβά σε 7 s θα είναι:

$$m_2 = \rho V = \rho \Pi \Delta t \Rightarrow m_2 = 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 7\,\text{kg} \Rightarrow \mathbf{m_2 = 2{,}1\,kg}.$$

Λόγω της ισορροπίας του (γεμάτου) κουβά θα έχουμε $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N = (m_1 + m_2)g \Rightarrow$ **N = 25 N**

Η μέγιστη στατική τριβή που μπορεί να αναπτυχθεί είναι:




$T_{\sigma\tau,max} = \mu N \Rightarrow$ **$T_{\sigma\tau,max}$ = 20 N**

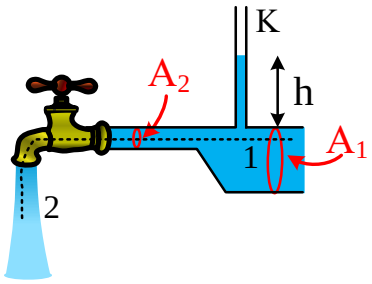
Αφού όταν ο κουβάς γεμίζει με την παραπάνω ποσότητα νερού μπορούμε να έχουμε Α.Α.Τ. η μέγιστη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στον κουβά θα έχει μέτρο ίσο με την στατική τριβή ώστε να ισορροπεί. Άρα $F_{max} = T_{\sigma\tau,max} \Rightarrow$ **$F_{max}$ = 20 N**.

**β.** Η διατομή $A_1$ έχει εμβαδό $A_1 = 3\ cm^2$.

Η παροχή είναι σταθερή οπότε $\Pi = A_1\upsilon_1 \Rightarrow 3\cdot10^{-4}\ m^3/s = (3\cdot10^{-4}\upsilon_1)\ m^2 \Rightarrow \upsilon_1 = 1\ m/s$.

Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι: $\frac{K_1}{V} = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{K_1}{V} = \frac{1}{2}\cdot10^3\cdot1\frac{J}{m^3} \Rightarrow$ **$\frac{K_1}{V} = 500\frac{J}{m^3}$**

**γ.** Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για την ρευματική γραμμή του σχήματος (μέχρι την έξοδο) και έχουμε:




$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Rightarrow p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho gh = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^2 + 2gh = \upsilon_2^2 \Rightarrow h = \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{9-1}{20}m \Rightarrow$$ **h = 0,4 m**.

**δ.** Μόλις κόψουμε το νήμα το σώμα Σ θα κινείται χωρίς να αλλάξει κατεύθυνση, μέχρι να φτάσει στο άλλο άκρο, άρα $h = 2A \Rightarrow A = 0{,}2\ m$.

Αλλά $F_{max} = kA \Rightarrow$ **k = 100 N/m**.

Το σώμα ξεκινά την ταλάντωση του με μηδενική ταχύτητα και αφού σταματά στο άλλο άκρο το οποίο είναι και το θετικό συμπεραίνουμε ότι την $t_0 = 0$ έχουμε $x = -A \Rightarrow A\eta\mu\varphi_0 = -A \Rightarrow \varphi_0 = 3\pi/2$ rad.

Επίσης $k = m\omega^2 \Rightarrow \omega = 10$ rad/s.

Τελικά $\mathbf{x = 0{,}2\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})}$ (S.I.) .

**Σχόλιο από τον Πρόδρομο Κορκίζογλου:**

Για τη δύναμη που ασκεί το προσπίπτον νερό στον κουβά, δεχόμενοι ότι μηδενίζεται η ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας dm αμέσως μετά την "κρούση" της με την υπόλοιπη μάζα του νερού, και ότι ‘’πέφτει’’ από ύψος $h_1$, θα έχουμε: $dm \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} dm \cdot \upsilon_2^2 = \frac{1}{2} dm \cdot \upsilon_3^2 \Rightarrow \upsilon_3 = \sqrt{\upsilon_2^2 + 2gh_1}$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε: $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{A_1\upsilon_1}{A_2} = \frac{3A_2\upsilon_1}{A_2} \Rightarrow \upsilon_2 = 3\,m/s$

Αν $h_1 = 0,2$ m τότε $\upsilon_3 = \sqrt{\upsilon_2^2 + 2gh_1} = \sqrt{9+4}\,m/s = \sqrt{13}\,m/s$

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m\upsilon_3)}{dt} = \frac{\rho dV \cdot \upsilon_3}{dt} = \rho \Pi \upsilon_3 = 10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{13}\,N \Rightarrow \Sigma F \simeq 1,08\,N$$

Αυτή η δύναμη ασκείται στη στοιχειώδη μάζα του νερού, για να μηδενιστεί η ταχύτητά της, άρα και η στοιχειώδης μάζα θα ασκήσει ίση και αντίθετη δύναμη στον πυθμένα του κουβά. Άρα η ροή του νερού θα πρέπει να σταματήσει τη στιγμή που το βάρος του νερού είναι: B = N – 1,08 – 4 = 25 – 1,08 –4 = 19,92 N = $g\rho\Pi t \Rightarrow t = 19,92/(10^3 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 10) = 6,64$ s.