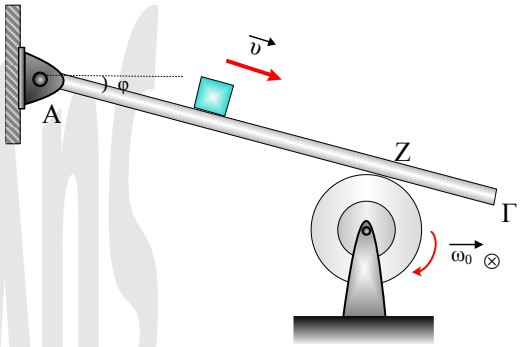
Η μία τριβή σταθερή η άλλη… με αστάθεια.

Σημειακό αντικείμενο Σ μάζας $m_1 = 0,8$ kg βρίσκεται στο άκρο Α της δοκού μάζας $m_2 = 3,2$ kg και μήκους $\ell = 5$ m. Η δοκός βρίσκεται σε επαφή με τροχό, ροπής αδράνειας $I = 0,9$ kg·m^2 και ακτίνας $R = 0,3$ m ο οποίος περιστρέφεται. Η δοκός παρουσιάζει ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης και με το σημειακό αντικείμενο αλλά και με τον τροχό. Κάποια στιγμή ($t_0 = 0$) που ο τροχός έχει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 37$ rad/s εκτοξεύουμε το σημειακό αντικείμενο με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 1$ m/s, η οποία διατηρείται σταθερή κατά την διάρκεια της ολίσθησης πάνω στη δοκό.



α. Να βρείτε το συντελεστής τριβής ολίσθησης της δοκού με τα δύο σώματα.

β. Να υπολογίσετε την κάθετη δύναμη που δέχεται η δοκός από τον τροχό σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ. Να βρείτε το έργο της ροπής των τριβών στον τροχό από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$, μέχρι την χρονική στιγμή t_1 που το σώμα Σ εγκαταλείπει τον τροχό.

δ. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που σταματά να περιστρέφεται ο τροχός.

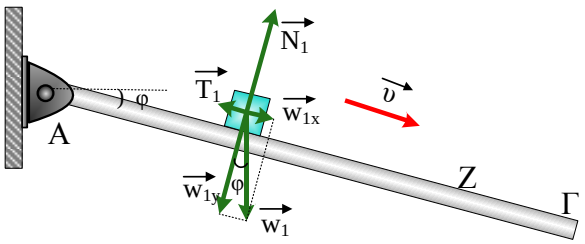
ε. Να γίνουν τα διαγράμματα των συνιστωσών της δύναμης που δέχεται η δοκός από την άρθρωση από την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως την χρονική στιγμή $t_3 = 10$ s.

Δίνεται ημφ = 0,6, συνφ = 0,8, g = 10 m/s^2. Η απόσταση ΑΖ όπου Ζ το σημείο που ακουμπά η δοκός στον τροχό είναι (ΑΖ) = d = 4 m. Η άρθρωση και ο άξονας της τροχαλίας δεν παρουσιάζουν τριβές.

Λύση

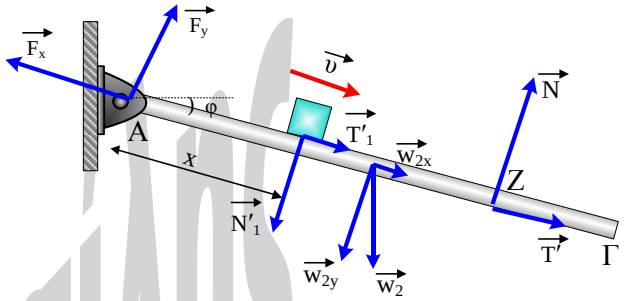
α. Το σώμα Σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, άρα θα έχουμε κάθε χρονική στιγμή:

$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow T = m_1 g\eta\mu\varphi$ αλλά και $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g\sigma\upsilon\nu\varphi$.



Για την τριβή ολίσθησης ισχύει: $T_1 = \mu N_1 \Rightarrow m_1 g\eta\mu\varphi = \mu \cdot m_1 g\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \mu = \dfrac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \mu = \dfrac{3}{4}$

β. Η δοκός ισορροπεί οπότε: $\Sigma\vec{\tau}_A = 0 \Rightarrow$



$$Nd - w_2 \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - N'_1 x = 0 \Rightarrow N = \frac{m_2 g\ell\sigma\upsilon\nu\varphi + 2m_1 g\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot x}{2d}$$

$$\Rightarrow N = \frac{128 + 12{,}8x}{8}\ (\text{S.I.}) \Rightarrow N = 16 + 1{,}6\,x\ (\text{S.I.})$$

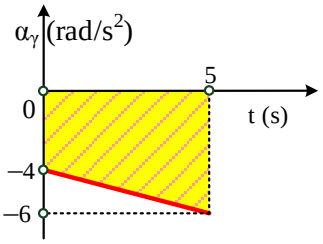
Επειδή όμως η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή ισχύει: $x = \upsilon\Delta t \Rightarrow x = \upsilon(t - t_0) \Rightarrow x = t$ (S.I.)

N = 16 + 1,6t (S.I.)

γ. Η δοκός ασκεί στον τροχό δύναμη ίσου μέτρου και αντιθέτου φοράς **N' = 16 + 1,6t (S.I.)**

Η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο: $T = \mu N' \Rightarrow$ **T = 12 + 1,2t (S.I.)**

Θεωρούμε την φορά της περιστροφής του τροχού ως θετική και έχουμε:



$$\Sigma\vec{\tau} = I\alpha_\gamma \Rightarrow -TR = I\alpha_\gamma \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_\gamma = -4 - 0{,}4t\ (\text{S.I.})}$$

Το σώμα Σ εγκαταλείπει την δοκό όταν $x = \ell \Rightarrow t_1 = 5$ s.

Από το διάγραμμα $\alpha_\gamma - t$ μπορούμε από το εμβαδόν να βρούμε την μεταβολή της ταχύτητας.

Έτσι έχουμε: $\Delta\omega = E_{\mu\beta} = \dfrac{-6-4}{2} 5\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta\omega = -25\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}}$. Άρα: $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega \Rightarrow$ **ω_1 = 12 rad/s**.

Το έργο της ροπής της τριβής μπορεί να βρεθεί με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε. για τον τροχό.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{\tau_T} \Rightarrow W_{\tau_T} = \frac{1}{2} I(\omega_1^2 - \omega_0^2) \Rightarrow W_{\tau_T} = \frac{1}{2} 0{,}9(12^2 - 37^2)\,\text{J} \Rightarrow \boldsymbol{W_{\tau_T} = -551{,}25\,\text{J}}$$

Σημείωση: Το παραπάνω ερώτημα θα μπορούσε να λυθεί και με την βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού από έμπειρους μαθητές, δηλαδή στην επανάληψη!!!

Έχουμε: $\alpha_\gamma = \dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha_\gamma dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha_\gamma dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = -4t - 0{,}2t^2\ (\text{S.I.}) \Rightarrow \omega = 37 - 4t - 0{,}2t^2\ (\text{S.I.})$

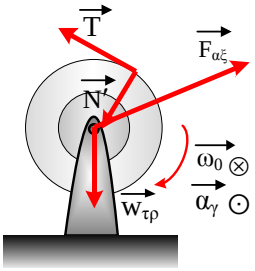
Δουκατζής Βασίλης

Η ροπή της τριβής είναι $\tau_T = -TR \Rightarrow \tau_T = -3,6 - 0,36t$ (S.I.) και το έργο της ροπής των τριβών είναι:

$$W_{\tau_T} = \int \tau d\theta = \int \tau \cdot \omega dt = \int_0^{5s} (-3,6-0,36t)(37-4t-0,2t^2)\,dt = \int_0^{5s} (0,072t^3+2,16t^2+1,08t-133,2)\,dt \Rightarrow$$

$$W_{\tau_T} = (0,018t^4+0,72t^3+0,54t^2-133,2t)\Big|_0^{5s} \Rightarrow \mathbf{W_{\tau_T} = -551,25\,J}$$

δ. Μετά την χρονική στιγμή t_1 η δύναμη που δέχεται η δοκός είναι σταθερή. Πράγματι:



$$\Sigma\vec{\tau}_A = 0 \Rightarrow Nd - w_2\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow N = \frac{m_2 g \ell \sigma\upsilon\nu\varphi}{2d} \Rightarrow \mathbf{N = 16\,N}$$ οπότε και N' = 16 N και

$T = \mu N' \Rightarrow \mathbf{T = 12\ N}$.

Η γωνιακή επιβράδυνση είναι: $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}_\gamma \Rightarrow -TR = I\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = -4\frac{rad}{s}$ και για το χρονικό διάστημα της ομαλά κυκλικής επιβραδυνόμενης κίνησης είναι:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha_\gamma} \Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{-12}{-4}s \Rightarrow \mathbf{t_2 = 8\,s}.$$

ε. Η δοκός ισορροπεί έτσι κάθε χρονική στιγμή ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_x - w_{2x} - T_1' - T' = 0 \Rightarrow F_x = w_{2x} + T_1' + T' \Rightarrow F_x = 19,2+4,8+12+1,2t\ (S.I.) \Rightarrow \mathbf{F_x = 36+1,2t\ (S.I.)}$$

για $0 \le t \le 5$ s.

Ενώ μετά την χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s:

$$\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_x - w_{2x} - T' = 0 \Rightarrow F_x = w_{2x} + T' \Rightarrow F_x = (19,2+12)\,N \Rightarrow \mathbf{F_x = 31,2\,N}$$ για $5\ s \le t \le 8\ s$

Ενώ μετά την χρονική στιγμή $t_2 = 8$ s ισχύει: $\Sigma\vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_x - w_{2x} = 0 \Rightarrow F_x = w_{2x} \Rightarrow \mathbf{F_x = 19,2\,N}$

Συνοψίζοντας $F_x = \begin{cases} 36+1,2t & 0 \le t \le 5s \\ 31,2 & 5s < t \le 8s \\ 19,2 & 8s < t \le 10s \end{cases}$ F_x σε N, t σε s.

Για την συνιστώσα $\vec{F}_y$ έχουμε: $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_y - w_{2y} - N_1' + N = 0 \Rightarrow F_y = 16-1,6t$ (S.I.)

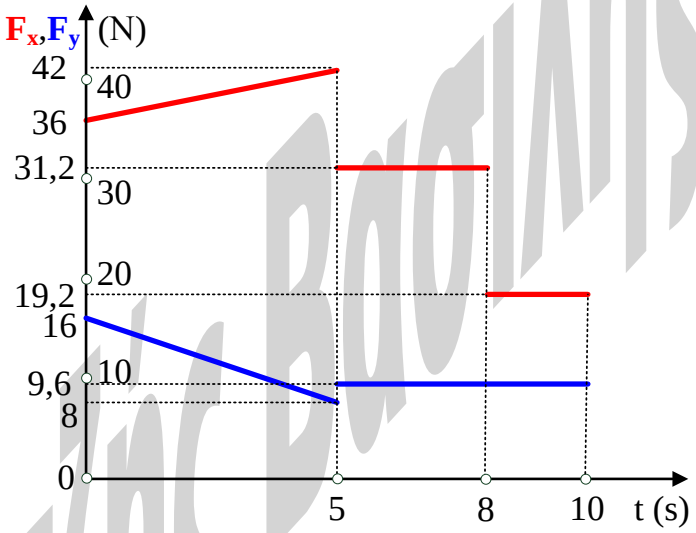
για $0 \le t \le 5$ s

Δουκάτζης Βασίλης

Μόλις το σώμα Σ εγκαταλείψει την δοκό: $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow F_y - w_{2y} + N = 0 \Rightarrow F_y = 9,6\,N$

για $5\ s \le t \le 10\ s$

Συνοψίζοντας $F_y = \begin{cases} 16 - 1,6t & 0 \le t \le 5s \\ 9,6 & 5s < t \le 10s \end{cases}$ F_y σε N, t σε s.



Δουκατζής Βασίλης