

Θα χοροπηδήσει ή θα ανέβει;

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το σώμα Σ_1 με $m_1 = 1$

kg, στο πάνω μέρος του λείου κεκλιμένου επιπέδου

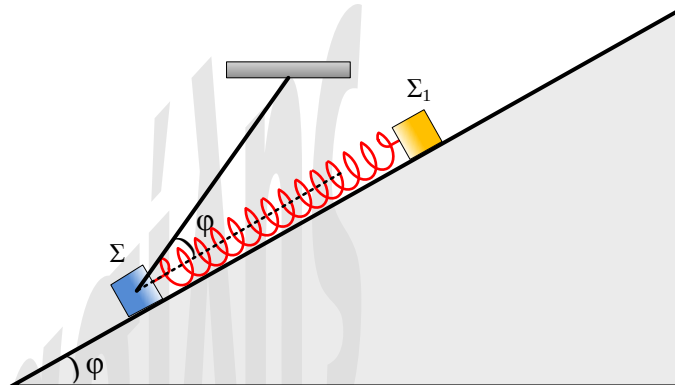
δεμένο με ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$.

Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο με σώμα Σ

μάζας $m = 3 \text{ kg}$ που ταυτόχρονα είναι δεμένο με

αβαρές και μη εκτατό νήμα. Το νήμα σχηματίζει ίδια

γωνία φ με το κεκλιμένο επίπεδο ($\eta\mu\varphi = 0,6$, $\sigma\upsilon\eta\varphi = 0,8$) όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. όταν το σύστημα ισορροπεί ποια η τάση του νήματος και η δύναμη που ασκεί το Σ στο κεκλιμένο επίπεδο

β. αφήνουμε σώμα Σ_2 από κάποιο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου και λίγο πριν την ελαστική κρούση με το Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $v_0 = 0,4 \text{ m/s}$. Η τάση του νήματος έχει μέγιστη τιμή κατά την ταλάντωση του Σ_1 , $T_{\max} = 35 \text{ N}$. Ποιο το μέτρο της ορμής του Σ_2 πριν την κρούση; (θεωρείστε ότι το Σ_2 το απομακρύνουμε κατάλληλα μετά την κρούση)

γ. ποια είναι η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να έχει κατά την ταλάντωση του το Σ_1 ώστε να μην χάνει την επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο το Σ ;

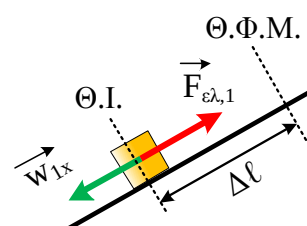
δ. ποια είναι η ελάχιστη γωνία που μπορεί να σχηματίζει το νήμα ώστε το σώμα να κάνει ταλαντώσεις με το μέγιστο δυνατό πλάτος

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

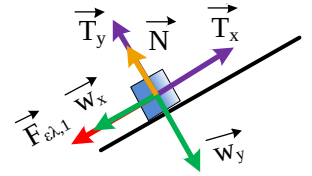
α. Το Σ_1 ισορροπεί δεχόμενο τις οριζόντιες δυνάμεις $\vec{w}_{1x}$ και $\vec{F}_{\varepsilon\lambda,1}$.

Άρα $\vec{\Sigma \vec{F}}_x = 0 \Rightarrow w_{1x} = F_{\varepsilon\lambda,1} \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,1} = m_1 g \eta\mu\varphi \Rightarrow \mathbf{F_{\varepsilon\lambda,1} = 6 \text{ N}}$



Επίσης $F_{ελ,1} = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \mathbf{0,06\text{ m}}$.

Για την ισορροπία του Σ έχουμε:



$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow w_x + F_{ελ,1} = T_x \Rightarrow mg\eta\mu\phi + F_{ελ,1} = T\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow T = \frac{mg\eta\mu\phi + F_{ελ,1}}{\sigma\upsilon\nu\phi} = \mathbf{T = 30\text{ N}}$$

Στον κατακόρυφο άξονα ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow w_{2y} = N + T_y \Rightarrow m_2 g \sigma\upsilon\nu\phi - T\eta\mu\phi = N \Rightarrow \mathbf{N = 6\text{ N}}$

Άρα λοιπόν το Σ ασκεί στο κεκλιμένο επίπεδο ίσου μέτρου δύναμη και αντίθετης φοράς. Έτσι $\mathbf{N' = 6\text{ N}}$.

β. Το σώμα Σ ισορροπεί άρα: $\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow w_x + F_{ελ,2} = T_{x,\max} \Rightarrow mg\eta\mu\phi + k(\Delta\ell + A) = T_{\max} \sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow$

$$A = \frac{T_{\max} \sigma\upsilon\nu\phi - mg\eta\mu\phi - k\Delta\ell}{k} \Rightarrow \mathbf{A = 0,04\text{ m}}.$$

Η ταχύτητα που απέκτησε το Σ₁ μετά την κρούση είναι η μέγιστη της ταλάντωσης, αφού η κρούση έγινε στη

Θ.Ι. της ταλάντωσης. Οπότε $v_1 = v_{\max} = \omega A$ αλλά $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \mathbf{\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$.

Τελικά $\mathbf{v_1 = 0,4\text{ m/s}}$. Δηλαδή τα σώματα αντάλλαξαν ταχύτητες, συνεπώς έχουν ίσες μάζες, $m_1 = m_2 = 1\text{ kg}$.

Η ορμή του Σ₂ πριν την κρούση είχε μέτρο $p_2 = m_2 v_0 \Rightarrow \mathbf{p_2 = 0,4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}$.

γ. Όταν το Σ τείνει να ανασηκωθεί οριακά θα μηδενιστεί η κάθετη αντίδραση του δαπέδου έτσι θα έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow w_{2y} = T'_y \Rightarrow m_2 g \sigma\upsilon\nu\phi = T'\eta\mu\phi \Rightarrow \mathbf{T' = 40\text{ N}}.$$

Στον οριζόντιο άξονα θα ισχύει: $\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow w_x + F'_{ελ} = T'_x \Rightarrow mg\eta\mu\phi + k(\Delta\ell + A') = T' \sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow$

$$A' = \frac{T' \sigma\upsilon\nu\phi - mg\eta\mu\phi - k\Delta\ell}{k} \Rightarrow \mathbf{A' = 0,08\text{ m}}.$$

Έτσι $E = \frac{1}{2} kA'^2 \Rightarrow E = 0,32 \text{ J}$.

δ. Εφόσον μικραίνουμε την γωνία μεταξύ νήματος και κεκλιμένου επιπέδου μπορούμε να πετυχαίνουμε ταλαντώσεις με μεγαλύτερο πλάτος. Βέβαια υπάρχει κάποιο όριο στην ελάττωση της γωνίας αφού η ταλάντωση δεν κινδυνεύει να καταστραφεί μόνο από την ανασήκωση του Σ, αλλά αν το πλάτος ξεπεράσει κάποιο όριο τότε το ελατήριο θα τραβήξει προς τα πάνω στο Σ.

Είδαμε παραπάνω ότι όταν χάνεται οριακά η επαφή στον άξονα y'y η συνιστώσα $\vec{T}_y$ παίρνει την μέγιστη τιμή της **$T_y = 24 \text{ N}$** .

Όταν το νήμα τείνει να χαλαρώσει στον οριζόντιο άξονα τότε θα έχουμε:

$$F_{ελ,max} = w_x = mg\eta\mu\varphi \Rightarrow F_{ελ,max} = 18 \text{ N}.$$

Στο άλλο η ταλάντωση θα έχει περάσει πάνω από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου ώστε δύναμη να γίνει ομόρροπη με την $\vec{w}_{1x}$ και θα ισχύει: $F_{ελ,max} + w_{1x} = kA_{max} \Rightarrow A_{max} = 0,24 \text{ m}$.

Κατά την κάθοδο το ελατήριο θα ασκεί μέγιστη δύναμη στο Σ μέτρου $F = k(\Delta\ell + A_{max}) \Rightarrow F = 30 \text{ N}$.

Έτσι η τάση του νήματος θα είναι τότε:

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F + w_x = T_x \Rightarrow T_x = 48 \text{ N}. \text{ Αλλά } \frac{T_y}{T_x} = \frac{24}{48} \Rightarrow \frac{T\eta\mu\theta}{T\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \epsilon\varphi\theta = \frac{1}{2}.$$

