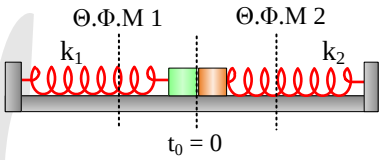
Συναντήσεις με ραντεβού.



Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 που φαίνονται στο σχήμα έχουν την ίδια μάζα m = 1 kg και είναι δεμένα στα άκρα των ελατηρίων σταθερών k_1 = 64 N/m και k_2. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι δεμένα σε ακλόνητα τοιχώματα. Απομακρύνουμε τα δύο σώματα από τις θέσεις ισορροπίας τους κατά $\Delta\ell$ = 0,4 m έτσι ώστε να εφάπτονται μεταξύ τους. Την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνονται ταυτόχρονα να εκτελέσουν απλή αρμονική ταλάντωση. Τα δύο σώματα επανέρχονται στην αρχική τους κατάσταση (σε οριακή επαφή) όταν το κάθε σώμα εκτελέσει N_1 και N_2 πλήρεις ταλαντώσεις έτσι ώστε $\frac{N_1}{N_2}=\frac{4}{5}$. Θεωρούμε ως θετική την φορά προς δεξιά.

α. Να γράψετε τις εξισώσεις ταλάντωσης των δύο σωμάτων

β. Θεωρούμε σύστημα ελατηρίου $k = |k_1 - k_2|$ με την ίδια μάζα m. Πόση ενέργεια θα χρειαστούμε για να το διεγείρουμε σε ταλάντωση για πλάτος ίσο με το πλάτος που υπολογίσατε παραπάνω.

γ. Να βρείτε την σχέση που δίνει πως μεταβάλλεται η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων θεωρώντας ως αρχή των μετρήσεων την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου 1.

δ. Ποια είναι η μέγιστη απόσταση μεταξύ των άκρων; να δικαιολογήσετε γιατί δεν είναι δυνατόν να βρεθούν τα δύο σώματα σ' αυτή την απόσταση.

Λύση

α. Η κυκλική συχνότητα του Σ_1 είναι: $k_1 = m\omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_1 = 8\frac{rad}{s}}$ και για το πλάτος έχουμε

$A_1 = A_2 = \Delta\ell = 0{,}4$ m.

Εφόσον οι δύο ταλαντωτές ξεκίνησαν ταυτόχρονα ως την συνάντηση τους ισχύει:

$$t_1 = t_2 \Rightarrow N_1T_1 = N_2T_2 \Rightarrow N_1\frac{2\pi}{\omega_1} = N_2\frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{8}{\omega_2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_2 = 10\frac{rad}{s}}.$$

Την στιγμή $t_0 = 0$, το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην θέση $y_1 = +A_1 \Rightarrow A_1 \eta\mu\varphi_{01} = A_1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_{01} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_{01} = \frac{\pi}{2} rad}$

ενώ την ίδια χρονική στιγμή για το σώμα Σ_2 έχουμε:

$y_2 = -A_2 \Rightarrow A_2 \eta\mu\varphi_{02} = A_2 \Rightarrow \eta\mu\varphi_{02} = -1 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_{02} = \frac{3\pi}{2} rad}$

Και τελικά $\boldsymbol{y_1 = 0,4\eta\mu(8t + \frac{\pi}{2})}$ (S.I.) και $\boldsymbol{y_2 = 0,4\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})}$ (S.I.).

β. Η σταθερά του δεύτερου ελατηρίου είναι: $k_2 = m\omega_2^2 \Rightarrow \boldsymbol{k_2 = 100 \frac{N}{m}}$

Άρα θα έχουμε: $k = |k_1 - k_2| \Rightarrow k = 36$ N/m.

Η ενέργεια που χρειάζεται για να διεγείρουμε ένα σύστημα είναι ίση με την ενέργεια με την οποία θα ταλαντώνεται μετά. Άρα $E = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} 36 \cdot 0,4^2 J \Rightarrow \boldsymbol{E = 2,88 J}$

γ. Η ταλάντωση του Σ_1 γίνεται γύρω από την θέση $x_0 = 0$, άρα θα έχει εξίσωση ταλάντωσης με τετμημένη $\boldsymbol{x_1 = 0,4\eta\mu(8t + \frac{\pi}{2})}$ (S.I.) ενώ η Θ.Φ.Μ.2 – Θ.Ι.2 βρίσκεται στην θέση $x_{02} = 2\Delta\ell = 0,8$ m, άρα κάθε στιγμή η τετμημένη θα δίνεται από την σχέση $\boldsymbol{x_2 = 0,8 + 0,4\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})}$ (S.I.).

Η απόσταση τους θα δίνεται από την σχέση $d = x_2 - x_1 \Rightarrow \boldsymbol{d = 0,8 + 0,4\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2}) - 0,4\eta\mu(8t + \frac{\pi}{2})}$

Σημείωση: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\eta\mu A - \eta\mu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{A-B}{2}$ και να προκύψει: $d = x_2 - x_1 \Rightarrow \boldsymbol{d = 0,8 + 0,8\sigma\upsilon\nu(9t + \pi)\eta\mu(t + \frac{\pi}{2})}$ (S.I.).

δ. Ο κάθε ταλαντωτής μπορεί να απομακρύνεται κατά 0,4 m από την θέση ισορροπίας του. Η απόσταση την Θ.Ι. είναι $d_1 = 0,8$ m αλλά το Σ_1 μπορεί να πάει αριστερά από την Θ.Ι. 0,4 m και το Σ_2 δεξιά από την Θ.Ι. κατά 0,4 m.

Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι ο χώρος που καταλαμβάνουν τα σώματα όταν ταλαντώνονται είναι **$d_2 = 1,6$ m**.

Για να βρεθούν τα σώματα στην απόσταση d_2 θα πρέπει ταυτόχρονα το Σ_1 βρεθεί στο αριστερό άκρο και το Σ_2 στο δεξί άκρο. Το Σ_1 βρίσκεται στο αριστερό άκρο τις χρονικές στιγμές $\frac{T_1}{2}, \frac{3T_1}{2}, \frac{5T_1}{2}, \ldots$ γενικά τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{(2\kappa_1+1)}{2}T_1$ και το δεύτερο στο αριστερό άκρο αντίστοιχα τις χρονικές στιγμές:

$t_2 = \frac{(2\kappa_2+1)}{2}T_2$. Αφού μιλάμε για ταυτόχρονα πρέπει $t_1 = t_2$

$$\frac{(2\kappa_1+1)}{2}T_1 = \frac{(2\kappa_2+1)}{2}T_2 \Rightarrow \frac{(2\kappa_1+1)}{2}\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{(2\kappa_2+1)}{2}\frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \frac{2\kappa_1+1}{2\kappa_2+1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{2\kappa_1+1}{2\kappa_2+1} = \frac{4}{5} \quad (1)$$

Αλλά $2\kappa + 1$ = περιττός αριθμός, αλλά το πηλίκο δύο περιττών είναι κλάσμα με περιττό αριθμητή και παρονομαστή, συνεπώς η (1) δεν έχει λύση για $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{N}$.

Άρα δεν θα απέχουν ποτέ 1,6 m.

Σημείωση: Αν χρησιμοποιούσαμε την σχέση $d = 0,8 + 0,8\sigma\upsilon\nu(9t+\pi)\eta\mu(t+\frac{\pi}{2})$ για να έχουμε d = 1,6 m θα πρέπει ταυτόχρονα το ημίτονο και το συνημίτονο να δίνουν ένα.

$\eta\mu(t+\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow t = 2\kappa\pi$ αλλά $\sigma\upsilon\nu(9t+\pi) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(9\cdot 2\kappa\pi + \pi) = -1$ όποτε αδύνατο!!!.