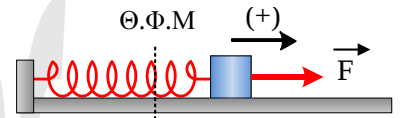


Η μέση ισχύς στην ταλάντωση.

Σώμα μάζας m είναι δεμένο στο άκρο O οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k που το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Ασκούμε στο σώμα σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 20\text{ N}$ ώστε το ελατήριο να αρχίσει να επιμηκύνεται. Μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{\pi}{20}\text{ s}$ η μέση ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίση με $\bar{P} = \frac{80}{\pi}\text{ W}$ και η στιγμιαία ισχύς γίνεται μέγιστη. Μόλις η ισχύς πάρει την μέγιστη της τιμή η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται.



- α.** Ποια η μέγιστη ισχύς της δύναμης $\vec{F}$
- β.** πόση ενέργεια έχει αποθηκευτεί στο ελατήριο τη χρονική στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$;
- γ.** ποια η εξίσωση της ορμής μετά την κατάργηση της $\vec{F}$;
- θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t_0 = 0$ την στιγμή κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$, και θετική την φορά της $\vec{F}$.
- δ.** Ποια χρονική στιγμή θα περάσει το σώμα από το σημείο κατάργησης της δύναμης $\vec{F}$ για πρώτη φορά;
- ε.** την στιγμή που το ταλαντούμενο σώμα επιστρέφει στην θέση κατάργησης της $\vec{F}$, ένα βλήμα $m_1 = 0,1\text{ kg}$ κινούμενο προς τα δεξιά, συγκρούεται με το ταλαντούμενο σώμα και το διαπερνά. Το σώμα μάζας m μετά την κρούση ταλαντώνεται με πλάτος ίσο με αυτό που είχε πριν την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$. Αν η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος είναι 182 J ποια η κινητική ενέργεια του βλήματος κατά την έξοδο του από το σώμα m ;

Λύση

α. Η μέση ισχύς μιας δύναμης δίνεται από την σχέση $\bar{P} = \frac{W_F}{\Delta t} \Rightarrow W_F = \bar{P} \cdot \Delta t \Rightarrow \mathbf{W_F = 4\text{ J}}$.

Το έργο όμως σταθερής δύναμης δίνεται από την σχέση $W_F = F \cdot s \Rightarrow s = \frac{W_F}{F} \Rightarrow \mathbf{s = 0,2\text{ m}}$

Αλλά σύμφωνα με την εκφώνηση η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται όταν η στιγμιαία ισχύς γίνεται μέγιστη.

Η στιγμιαία ισχύς σταθερής δύναμης δίνεται από τη σχέση $P = \frac{dW_F}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ αλλά για να έχουμε μέγιστη ισχύς, τα διανύσματα της δύναμης και της ταχύτητας, θα πρέπει να είναι ομόρροπα και η ταχύτητα να πάρει την μέγιστη της τιμή. Άρα $P_{\max} = F \cdot v_{\max}$.

Αφού η ταχύτητα είναι μέγιστη το σώμα περνά από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (που κάνει το σώμα όσο ενεργεί η δύναμη $\vec{F}$), οπότε $s = A \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$.

Η ταλάντωση του σώματος ξεκίνησε από άκρο και μετά από χρόνο Δt βρίσκεται στην θέση ισορροπίας συνεπώς $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4\Delta t \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Έτσι $v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 2 \text{ m/s}$ και $P_{\max} = F \cdot v_{\max} \Rightarrow P_{\max} = 40 \text{ W}$

β. Την στιγμή που καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ το σώμα βρίσκεται στην θέση ισορροπίας οπότε θα έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = F \Rightarrow kA = F \Rightarrow k = \frac{F}{A} \Rightarrow k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

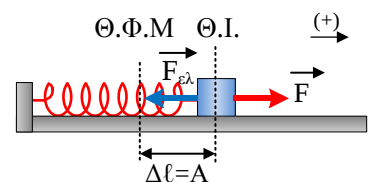
Η παραμόρφωση του ελατηρίου εκείνη τη χρονική στιγμή είναι ίση με $\Delta \ell = A$, συνεπώς

$$U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 \Rightarrow U_{\text{ελ}} = 2 \text{ J}.$$

γ. Μετά την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ το σώμα θα ξεκινήσει μία νέα ταλάντωση με θέση ισορροπίας την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και ενέργεια ταλάντωσης η ενέργεια που πρόσφερε μέσω του έργου της η δύναμη $\vec{F}$. Άρα για το πλάτος της νέας ταλάντωσης θα έχουμε:

$$E' = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} k A'^2 = W_F \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{2W_F}{k}} \Rightarrow A' = 0,2\sqrt{2} \text{ m}.$$

Η ταλάντωση ξεκινά από την θέση $x' = A = 0,2 \text{ m}$ έχοντας $v' = v_{\max} > 0$, οπότε υπάρχει αρχική φάση.



$$\text{Για } t = 0 \text{ έχουμε: } x' = A \Rightarrow A' \eta \mu \varphi_0 = A \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \frac{A}{A'} \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{array} \right\} \xrightarrow{0 \leq \varphi_0 < 2\pi} \left. \begin{array}{l} \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$\text{Αλλά για } t = 0 \text{ η ταχύτητα θα είναι } \left. \begin{array}{l} v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{4} > 0 \\ v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \frac{3\pi}{4} < 0 \end{array} \right\} \text{ οπότε } \varphi_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$\text{Η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι } v = v'_{\max} \sigma \upsilon \nu (\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = 10\sqrt{2} \sigma \upsilon \nu (10t + \frac{\pi}{4}) \text{ (S.I.)}$$

$$\text{Η μάζα του σώματος είναι } k = m\omega^2 \Rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} \Rightarrow m = 1 \text{ kg.}$$

$$\text{Άρα } p = mv \Rightarrow p = 2\sqrt{2} \sigma \upsilon \nu (10t + \frac{\pi}{4}) \text{ (S.I.).}$$

δ. Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = 0,2\sqrt{2} \eta \mu (10t + \frac{\pi}{4}) \text{ (S.I.) η θέση κατάργησης της } \vec{F} \text{ είναι η } x = 0,2 \text{ m. άρα:}$$

$$0,2 = 0,2\sqrt{2} \eta \mu (10t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \eta \mu (10t + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 10t + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ 10t + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \frac{2\kappa\pi}{10} \\ t = \frac{2\kappa\pi}{10} + \frac{\pi}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

ε. Η κρούση γίνεται όταν το ταλαντούμενο σώμα περνά από την θέση $x = 0,2 \text{ m}$ όπου καταργήσαμε την

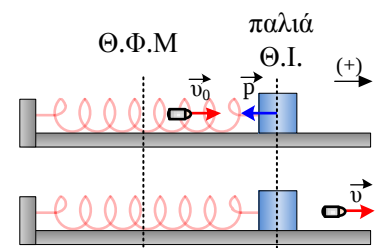
$$\text{δύναμη } \vec{F}. \text{ Η αλγεβρική τιμή της ορμής εκείνη τη στιγμή είναι: } p = 2\sqrt{2} \sigma \upsilon \nu (10 \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow p = -2 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}.$$

Αφού το πλάτος της ταλάντωσης μετά την κρούση θα είναι ίσο με αυτό που είχε πριν την κατάργηση της δύναμης $\vec{F}$ θα πρέπει το ταλαντούμενο σώμα να ακινητοποιηθεί στιγμιαία.

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ο. και έχουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_0 - |p| = m_1 v \Rightarrow 0,1 v_0 - 2 = 0,1 v \text{ (S.I.)} \Rightarrow v_0 - v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1)$$

Η απώλεια μηχανικής ενέργειας εξαιτίας της κρούσης είναι:



$$E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}m_1v_0^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}m_1v^2 \Rightarrow 182 = 0,05v_0^2 + 2 - 0,05v^2 \text{ (S.I.)} \Rightarrow 180 = 0,05(v_0^2 - v^2) \text{ (S.I.)} \Rightarrow$$

$$3600 = (v_0 - v)(v_0 + v) \text{ (S.I.)} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 3600 = 20(v_0 + v) \text{ (S.I.)} \Rightarrow v_0 + v = 180 \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε $2v_0 = 200 \text{ m/s} \Rightarrow v_0 = 100 \text{ m/s}$ και $v = 80 \text{ m/s}$.

Τελικά η κινητική ενέργεια του βλήματος μετά την κρούση είναι $K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \mathbf{K = 320 \text{ J}}$.