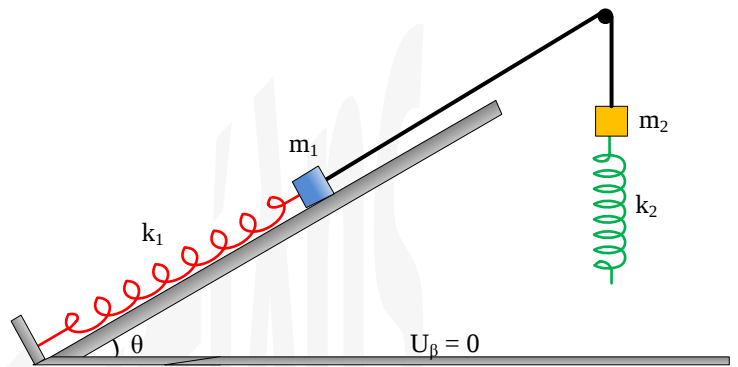


ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΑΡΧΙΚΑ ΕΙΝΑΙ ΔΕΜΕΝΑ ΜΕ ΝΗΜΑ

Σώμα, μάζας $m_1 = 4 \text{ kg}$, είναι δεμένο στο ένα άκρο ελατηρίου σταθεράς k_1 , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο, και μέσω αβαρούς νήματος και ενός τελείως λείου καρφιού, με άλλο σώμα, μάζας $m_2 = 6 \text{ kg}$, που φέρει στο κάτω μέρος του ελατηρίου σταθεράς k_2 και



φυσικού μήκους $\ell_0 = 1 \text{ m}$, όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα. Το κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης $\theta = 30^\circ$ και αρχικά το ελατήριο k_1 είναι παραμορφωμένο κατά $\Delta x = 0,2 \text{ m}$. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα μάζας m_1 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ενώ το σώμα μάζας m_2 αρχικά πέφτει ελεύθερα και μόλις το άκρο του ελατηρίου πατήσει στο έδαφος (στιγμή που θεωρούμε ως $t = 0$), κολλάει σ' αυτό χωρίς απώλειες ενέργειας. Η ταλάντωση που εκτελεί κατόπιν το σώμα μάζας m_2 έχει εξίσωση απομάκρυνσης $x_2 = A_2 \eta \mu(10t + \frac{5\pi}{6})$ S.I. Να βρείτε:

- α.** την σταθερά k_1 του ελατηρίου στο κεκλιμένο επίπεδο.
- β.** την μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύει το ελατήριο σταθεράς k_1 .
- γ.** το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής όταν το σώμα μάζας m_1 διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.
- δ.** την αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος μάζας m_2 (πριν κόψουμε το νήμα) θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο.
- ε.** την ελάχιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος μάζας m_2

Θεωρούμε ως θετική τη φορά προς τα πάνω για την ταλάντωση του σώματος μάζας m_2 . Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

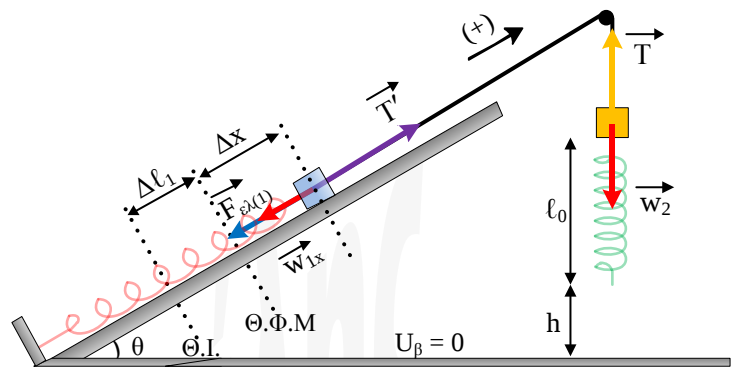
α. Η συνιστώσα του βάρους του σώματος μάζας m_1 έχει μέτρο $w_{1x} = m_1 g \eta \mu \theta \Rightarrow w_{1x} = 20 \text{ N}$

Από την ισορροπία του σώματος μάζας m_2 έχουμε:

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w}_2 + \vec{T} = 0 \Rightarrow T = w_2 \Rightarrow \mathbf{T = 60\,N}$$

Επειδή για τα μέτρα έχουμε $T > w_{1x}$ για να ισορροπεί το σώμα μάζας m_1 θα πρέπει η δύναμη που δέχεται από το ελατήριο να είναι ομόρροπη της συνιστώσας του βάρους $\vec{w}_{1x}$, όπως στο σχήμα. Άρα:



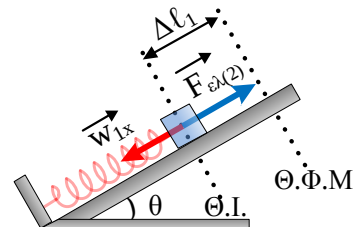
$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \vec{T}' + \vec{w}_{1x} + \vec{F}_{el(1)} = 0 \Rightarrow T' = w_{1x} + F_{el(1)} \stackrel{T'=T}{\Rightarrow} F_{el(1)} = T - w_{1x} \Rightarrow k_1 \Delta x = T - w_{1x} \Rightarrow k_1 = \frac{T - w_{1x}}{\Delta x}$$

$$\mathbf{k_1 = 200 \frac{N}{m} .}$$

β. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1 είναι κάτω από

$$\text{τη θέση φυσικού μήκους κατά: } \Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \vec{w}_{1x} + \vec{F}_{el(2)} = 0 \Rightarrow w_{1x} = F_{el(2)} \Rightarrow$$

$$k_1 \Delta \ell_1 = w_{1x} \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{w_{1x}}{k_1} \Rightarrow \mathbf{\Delta \ell_1 = 0,1\,m}$$



Η ταλάντωση γίνεται γύρω από τη θέση ισορροπίας και απέχει απ' αυτήν (την στιγμή που κόβεται το νήμα)

$$A_1 = \Delta \ell_1 + \Delta x \Rightarrow \mathbf{A_1 = 0,3\,m}$$

Κατά την διάρκεια της ταλάντωσης το ελατήριο υφίσταται μέγιστη παραμόρφωση $\Delta \ell_{\max} = \Delta \ell_1 + A_1$

$$\Rightarrow \mathbf{\Delta \ell_{\max} = 0,4\,m} . \text{ Άρα } U_{\max}^{el} = \frac{1}{2} k_1 \Delta \ell_{\max}^2 \Rightarrow \mathbf{U_{\max}^{el} = 16\,J} .$$

γ. Τη στιγμή που το σώμα μάζας m_1 περνά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, η μόνη δύναμη που του ασκείται στην διεύθυνση της κίνησης του είναι η συνιστώσα του βάρους του $\vec{w}_{1x}$. Άρα:

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = |\Sigma F| = w_{1x} \Rightarrow \left| \frac{dp}{dt} \right| = \mathbf{20 \frac{kg \cdot m}{s^2}}$$

δ. Το σώμα μάζας m_2 μετά το κόψιμο του νήματος κάνει ελεύθερη πτώση.

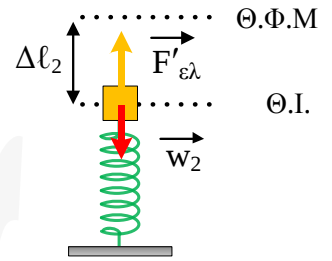
Σύμφωνα με τη σχέση $x_2 = A_2 \eta \mu(10t + \frac{5\pi}{6})$ (S.I.) προκύπτει ότι η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι:

$$v_2 = v_{\max,2} \sigma \upsilon \nu(10t + \frac{5\pi}{6}) \text{ (S.I.)} .$$

ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ

Στην ισορροπία ισχύει: $\Sigma \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \vec{w}_2 + \vec{F}'_{ελ} = 0 \Rightarrow w_2 = F'_{ελ} \Rightarrow k_2 \Delta \ell_2 = m_2 g \Rightarrow$

$$m_2 \omega_2^2 \Delta \ell_2 = m_2 g \Rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{g}{\omega_2^2} \Rightarrow \Delta \ell_2 = 0,1 \text{ m}$$



Από την εξίσωση της απομάκρυνσης για $t = 0$ (στιγμή που το σώμα έρχεται σε

επαφή με το ελατήριο), έχουμε: $x_2 = A_2 \eta\mu(\frac{5\pi}{6}) \Rightarrow x_2 = \frac{A_2}{2}$

Αλλά την $t = 0$ ισχύει επίσης και $x_2 = \Delta \ell_2$, άρα από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$0,1 = \frac{A_2}{2} \Rightarrow A_2 = 0,2 \text{ m} \text{ και η εξίσωση της ταχύτητας τελικά είναι: } v_2 = 2\sigma\upsilon\nu(10t + \frac{5\pi}{6})$$

Την χρονική στιγμή ($t = 0$) που το ελατήριο ακουμπά το δάπεδο το σώμα μάζας m_2 έχει ταχύτητα μέτρου

$$|v_2| = \left| 2\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{6}) \right| \Rightarrow |v_2| = \sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Κ.Ε. από τη στιγμή που το νήμα κόβεται μέχρι τη στιγμή που το ελατήριο σταθεράς k_2

ακουμπά στο έδαφος. $K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{w_2} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h \Rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow h = 0,15 \text{ m}$. Δηλαδή το σώμα

μάζας m_2 βρίσκεται αρχικά πάνω από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας σε ύψος $H = h + \ell_0 \Rightarrow H =$

$$1,15 \text{ m}$$

Άρα $U_{\text{αρχ}} = m_2 g H \Rightarrow U_{\text{αρχ}} = 69 \text{ J}$.

ε. Την ελάχιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια το σώμα μάζας m_2 την έχει όταν βρεθεί στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσης του δηλαδή όταν το ελατήριο έχει μέγιστη παραμόρφωση.

οπότε $\Delta \ell'_{\text{max}} = \Delta \ell_2 + A_2 \Rightarrow \Delta \ell'_{\text{max}} = 0,3 \text{ m}$. και το μήκος του ελατηρίου εκείνη τη στιγμή είναι

$$\ell = \ell_0 - \Delta \ell'_{\text{max}} \Rightarrow \ell = 0,7 \text{ m}.$$

Συνεπώς η ελάχιστη βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι: $U_{\text{min}} = m_2 g \ell \Rightarrow U_{\text{min}} = 42 \text{ J}$.