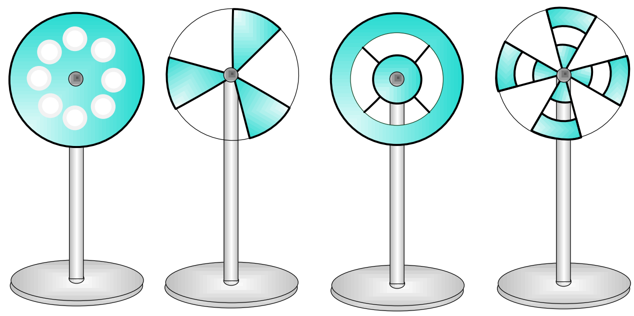
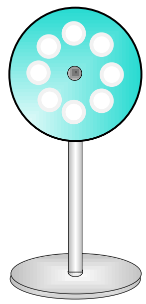
ΑΝΕΜΙΣΤΗΡΕΣ.



Κατασκευαστής ανεμιστήρων έδωσε 4 σχεδιαστές την εντολή να σχεδιάσουν ανεμιστήρες με βάση έναν κύλινδρο μάζας M ακτίνας R και ροπής αδράνειας ως προς το κέντρο του $I = \frac{1}{2}MR^2$. Οι σχεδιαστές του παρέδωσαν τα σχέδια που φαίνονται στην διπλανή εικόνα. Ο πρώτος έχει 8 τρύπες με το κέντρο της κάθε κυλινδρικής τρύπας να απέχει από το κέντρο του δίσκου απόσταση $d = \frac{R}{2}$ και ακτίνα τρύπας $r = \frac{R}{6}$. Όλες οι τρύπες βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις. Ο δεύτερος ανεμιστήρας αποτελείται από 3 ογδοημόρια, ενώ ο τρίτος ανεμιστήρας αποτελείται από κύλινδρο ακτίνας $r = \frac{R}{3}$ και δακτυλίδι με εσωτερική ακτίνα $\frac{2R}{3}$ και εξωτερική ακτίνα R. Τέλος ο τέταρτος ανεμιστήρας αποτελείται από 4 ογδοημόρια με το κάθε ογδοημόριο να έχει ακτίνα $r = \frac{R}{3}$ και 4 κομμάτια που το καθένα είναι το $\frac{1}{8}$ τμήματος δακτυλιδιού με εσωτερική ακτίνα $\frac{2R}{3}$ και εξωτερική ακτίνα R. Ο κατασκευαστής θέλοντας να συμπεριφέρονται το ίδιο σε κάθε αυξομείωση της ταχύτητας περιστροφής σας αναθέτει να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του καθενός ώστε το μοτέρ που θα βάλει στον καθένα να έχει την κατάλληλη ροπή. Μπορείτε να βοηθήσετε;

Τα μεταλλικά περιβλήματα που χρησιμοποιούνται για την στήριξη των διαφόρων κομματιών στους ανεμιστήρες 2, 3, 4, θεωρούνται αμελητέας μάζας.

Λύση



α. Ο κάθε κύλινδρος που αφαιρείται έχει μάζα:

$$d = d' \Rightarrow \frac{M}{V} = \frac{m}{V'} \Rightarrow \frac{M}{\pi R^2 h} = \frac{m}{\pi r^2 h} \Rightarrow \frac{M}{R^2} = \frac{m}{\frac{R^2}{36}} \Rightarrow m = \frac{M}{36}$$

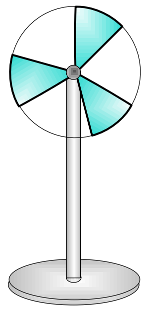
Η ροπή αδράνειας κάθε τρύπας ως προς το κέντρο μάζας της είναι: $I_{1,cm} = \frac{1}{2}mr^2$.

Αλλά με Steiner ως προς το κέντρο του μεγάλου δίσκου $I_{1,O}=\frac{1}{2}mr^2+m(3r)^2=\frac{19}{2}mr^2$

Και η συνολική ροπή αδράνειας των 8 κυλίνδρων $I_{ολ}=8I_{1,O}=8\frac{19}{2}mr^2=8\frac{19}{2}\frac{M}{36}\frac{R^2}{36}\Rightarrow I_{ολ}=\frac{19}{324}MR^2$

Και του ανεμιστήρα: $I_{αν,1}=\frac{1}{2}MR^2-\frac{19}{324}MR^2\Rightarrow \mathbf{I_{αν,1}=\frac{143}{324}MR^2}$

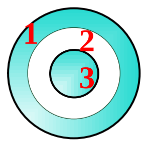
β. Το κάθε ογδοημόριο (αν κόψουμε τον δίσκο σε 8 όμοια κομμάτια) έχει ροπή αδράνειας I_2



για την οποία ισχύει: $I_{ολ}=8I_2\Rightarrow \frac{1}{2}MR^2=8I_2\Rightarrow I_2=\frac{1}{16}MR^2$

Άρα $I_{αν,2}=3I_2=3\frac{1}{16}MR^2\Rightarrow \mathbf{I_{αν,2}=\frac{3}{16}MR^2}$

γ. Για τον τρίτο ανεμιστήρα έχουμε:



Ο κύλινδρος 2,3 έχει μάζα: $d=d'\Rightarrow \frac{M}{V}=\frac{m_{2,3}}{V'}\Rightarrow \frac{M}{\pi R^2h}=\frac{m_{2,3}}{\pi r_{2,3}^2h}\Rightarrow \frac{M}{R^2}=\frac{m_{2,3}}{\frac{4R^2}{9}}\Rightarrow m_{2,3}=\frac{4M}{9}$

και ροπή αδράνειας $I_{2,3}=\frac{1}{2}m_{2,3}r_{2,3}^2\Rightarrow I_{2,3}=\frac{1}{2}\frac{4M}{9}\frac{4R^2}{9}\Rightarrow I_{2,3}=\frac{8}{81}MR^2$ άρα το δακτυλίδι 1 έχει ροπή αδράνειας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον πλήρη δίσκο τον δίσκο 2,3.

$$I_1=I_{ολ}-I_{2,3}=\frac{1}{2}MR^2-\frac{8}{81}MR^2\Rightarrow I_1=\frac{65}{162}MR^2$$

Ομοίως η μάζα του δίσκου 3 σε σχέση με αυτή του δίσκου 1 είναι:

$$d_3=d_1\Rightarrow \frac{m_3}{V_3}=\frac{M}{V}\Rightarrow \frac{m_3}{\pi r_3^2h}=\frac{M}{\pi R^2h}\Rightarrow \frac{m_3}{\frac{R^2}{9}}=\frac{M}{R^2}\Rightarrow m_3=\frac{M}{9}$$

Η ροπή αδράνειας του δίσκου 3 είναι: $I_3=\frac{1}{2}m_3r_3^2=\frac{1}{2}\frac{M}{9}\frac{R^2}{9}\Rightarrow I_3=\frac{1}{162}MR^2$

Άρα $I_{αν,3}=I_1+I_3=\frac{65}{162}MR^2+\frac{1}{162}MR^2\Rightarrow \mathbf{I_{αν,3}=\frac{33}{81}MR^2}$

δ. Η ροπή αδράνειας του τέταρτου ανεμιστήρα προκύπτει από τον ανεμιστήρα 3 αν παρατηρήσουμε ότι αν κόψουμε τον ανεμιστήρα 3 σε 8 όμοια κομμάτια και πάρουμε τα 4 από αυτά κατασκευάζουμε τον ανεμιστήρα 4 άρα: $I_{αν,4} = 4I_1 = 4\frac{I_{αν,3}}{8} = \frac{I_{αν,3}}{2} \Rightarrow \mathbf{I_{αν,4} = \frac{33}{162}MR^2}$