ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ ΜΙΑΣ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Ένα σώμα μάζας m = 0,4 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Από την χρονική στιγμή t = 0 μέχρι την χρονική στιγμή $t_1 = \frac{1}{6}$ s η φάση της ταλάντωσης έχει αυξηθεί κατά 400%. Τη χρονική στιγμή t_2 = 0,25 s η αλγεβρική τιμή της απομάκρυνσης είναι $x_2 = -\frac{A}{2}$ για πρώτη φορά. Το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα στο χρονικό διάστημα t_1 έως t_2 είναι s = 0,4 m.

α. Να βρείτε την αρχική φάση της ταλάντωσης

β. Να υπολογίσετε την συχνότητα με την οποία αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησης

γ. Να βρείτε την απόσταση που διανύει το σώμα μεταξύ δύο μεγιστοποιήσεων της κινητικής ενέργειας

δ. Να γίνει η γραφική παράσταση του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας για χρονικό διάστημα Δt = 1 s.

Δίνεται η τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\eta\mu(2\theta)}{2}$ και $\pi^2 = 10$.

Λύση

α. Έστω φ_1 η φάση τη χρονική στιγμή t_1, το ποσοστό αύξησης είναι:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varphi_0} \cdot 100\% = 400\% \Rightarrow \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varphi_0} = 4 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_1 = 5\varphi_0 \ (1)}$$

Η φάση τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $\varphi_1 = \omega t_1 + \varphi_0 \Rightarrow 5\varphi_0 = \omega\frac{1}{6} + \varphi_0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 24\varphi_0 (2)}$

Την χρονική στιγμή t_2 θα ισχύει:

$$x_2 = A\eta\mu\varphi_2 \Rightarrow -\frac{A}{2} = A\eta\mu\varphi_2 \Rightarrow \eta\mu\varphi_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ \varphi_2 = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{πρώτη φορά}} \begin{array}{l} \varphi_2 = \frac{11\pi}{6}\text{rad} \\ \varphi_2 = \frac{7\pi}{6}\text{rad} \end{array}$$

Άρα για πρώτη φορά $\varphi_2 = \frac{7\pi}{6}\text{rad}$.

Δουκατζής Βασίλης

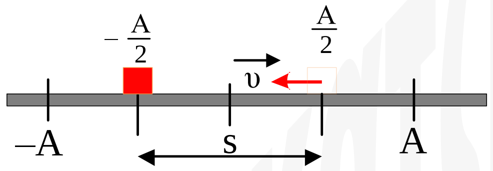
Αλλά $\varphi_2 = \omega t_2 + \varphi_0 \Rightarrow \frac{7\pi}{6} = 24\varphi_0 \cdot 0,25 + \varphi_0 \Rightarrow \frac{7\pi}{6} = 7\varphi_0 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}}$

β. Από την (2) έχουμε $\omega = 24\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boldsymbol{\omega = 4\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}$ και η συχνότητα είναι $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{f = 2\,\text{Hz}}$

Ένα σώμα που κάνει ταλάντωση αλλάζει κατεύθυνση στην κίνηση του κάθε φορά που βρίσκεται στα άκρα της ταλάντωσης, άρα η περίοδος της αλλαγής είναι $T' = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{2f} \Rightarrow f' = 2f \Rightarrow \boldsymbol{f' = 4\,\text{Hz}}$

γ. Η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται κάθε φορά που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης οπότε η διανυόμενη απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων από τη θέση ισορροπίας είναι δύο φορές το πλάτος του, d = 2A.

Την χρονική στιγμή t_1 η φάση της ταλάντωσης (από την (1)) είναι $\varphi_1 = 5\varphi_0 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_1 = \frac{5\pi}{6}\,\text{rad}}$ και η απομάκρυνση εκείνη τη στιγμή: $x_1 = A\eta\mu\varphi_1 \Rightarrow x_1 = A\eta\mu\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{A}{2}$.



Άρα το διανυόμενο χρονικό διάστημα μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2 είναι:

$s = |x_1| + |x_2| \Rightarrow s = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \Rightarrow \boldsymbol{A = 0,4\,\text{m}}$. Συνεπώς d = 2A ⇒ **d = 0,8 m**.

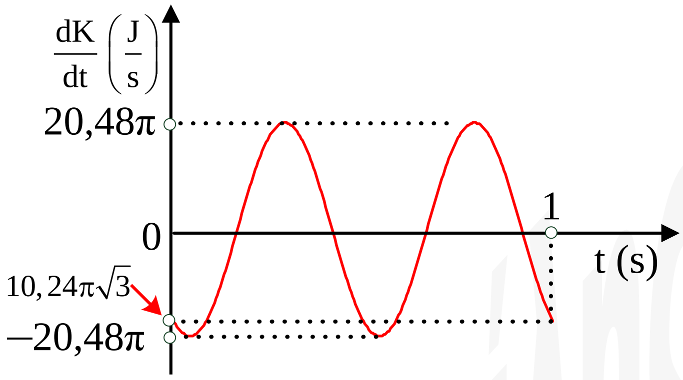
δ. Για το ρυθμό μεταβολής της κινητική ενέργειας έχουμε: $dK = \Sigma W \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma W}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma\vec{F}\cdot d\vec{x}}{dt} \Rightarrow$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\vec{F}\cdot\vec{\upsilon} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -Dx\upsilon = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)\cdot\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{m\omega^2 A\upsilon_{max}}{2}\eta\mu(2\omega t + 2\varphi_0) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{dK}{dt} = -20,48\pi\cdot\eta\mu(8\pi t + \frac{\pi}{3})\ (S.I.)}$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι ημιτονοειδής που ξεκινά από την τιμή

$\frac{dK}{dt} = -20,48\pi\cdot\eta\mu(8\pi\cdot 0 + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \boldsymbol{\frac{dK}{dt} = -10,24\sqrt{3}\pi\,\frac{J}{s}}$ και η γραφική παράσταση είναι (για Δt = 1 s = 2T)



Δουκατζής Βασίλης